

Barem clasa a VIII-a (OLM 2017-etapa locală)

Subiectul I. (7 puncte)

Avem relațiile: $(a + 5)^3 + \frac{a+5}{2} + 3 = 0$ și $(b - 4)^3 + \frac{b-4}{2} - 3 = 0$ (2 puncte)

Notând $a + 5 = x$ și $b - 4 = y \Rightarrow x^3 + \frac{x}{2} + 3 = 0$, $y^3 + \frac{y}{2} - 3 = 0$ (1 punct)

Adunând cele 2 relații $(x + y) \left(x^2 - xy + y^2 + \frac{1}{2} \right) = 0$ (2 puncte)

$x^2 - xy + y^2 + \frac{1}{2} = \left(x - \frac{y}{2} \right)^2 + \frac{3y^2}{4} + \frac{1}{2} > 0$ (1 punct)

$x + y = 0 \Rightarrow a + b = -1 \Rightarrow (a + b)^{2017} = -1$ (1 punct)

Subiectul II. (7 puncte)

$$\sqrt{2017} \leq \frac{2017+1}{2}$$

a) $\sqrt{2018} \leq \frac{2018+1}{2} = \frac{2017+2}{2}$ (2 puncte)

...

$$\sqrt{3361} \leq \frac{3361+1}{2} = \frac{2017+1345}{2}$$

$$\text{Deci } \sqrt{2017} + \sqrt{2018} + \sqrt{2019} + \dots + \sqrt{3361} \leq \frac{2017(3361-2016) + \frac{1345 \cdot 1346}{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2017} + \sqrt{2018} + \sqrt{2019} + \dots + \sqrt{3361} \leq \frac{2017 \cdot 1345 + 1345 \cdot 673}{2} \Leftrightarrow$$
 (2 puncte)

$$\sqrt{2017} + \sqrt{2018} + \sqrt{2019} + \dots + \sqrt{3361} \leq 1345^2.$$

b) $E(x) = \frac{25x^2 + 90x + 2017}{5x + 9} = \frac{25x^2 + 90x + 81 + 1936}{5x + 9} = \frac{(5x + 9)^2 + 1936}{5x + 9} = (5x + 9) + \frac{1936}{5x + 9}$ (2 puncte)

$$\geq 2 \cdot \sqrt{(5x + 9) \cdot \frac{1936}{5x + 9}} = 2 \cdot \sqrt{1936} = 2 \cdot 44 = 88$$
 (1 punct)

Subiectul III. (7 puncte)

Desen corect (1 punct)

a) Fie $\{P\} = LM \cap AB \Rightarrow P \in (LMN)$ și $P \in (ABC)$ deci P aparține dreptei de intersecție a planelor neperalele (ABC) și (LMN) . Analog Q și R aparțin aceleiași drepte. (2 puncte)

b) Din teorema lui Pitagora se obțin relațiile:

$$\begin{array}{ll}
 C'A^2 = AD^2 - C'D^2 & C'B^2 = BD^2 - C'D^2 \\
 A'B^2 = BD^2 - A'D^2 & \text{și } A'C^2 = DC^2 - A'D^2 \quad \text{de unde rezultă relația cerută.} \quad (2 \text{ puncte}) \\
 B'C^2 = DC^2 - B'D^2 & B'A^2 = AD^2 - B'D^2
 \end{array}$$

c) Fie $H = pr_{(ABC)} D$. Din $DH \perp BC$ și $AD \perp BC$ rezultă $BC \perp (ADH)$ de unde rezultă $AH \perp BC$.

Analog $CH \perp AB$ și deducem că proiecția lui D pe (ABC) este ortocentrul ΔABC . (1 punct)

Reciproc, dacă H este ortocentrul ΔABC atunci dreptele AH și DH determină un plan perpendicular pe BC , deci $AD \perp BC$. Analog se demonstrează $AB \perp CD$. (1 punct)

Subiectul IV. (7 puncte)

Desen corect (1 punct)

a) În triunghiul ABF , (AE) este bisectoare și mediană, rezultă că $AE \perp BC$. (1 punct)

Din teorema bisectoarei, în triunghiul dreptunghic $AEC \Rightarrow AC = 2AE \Rightarrow m(\sphericalangle C) = 30^\circ$.

(Se poate demonstra și prin calcule, fără teorema bisectoarei)

$$\Rightarrow m(\sphericalangle EAC) = 60^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ \quad (2 \text{ puncte})$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} (MAC) \cap (ABC) = AC \\ BA \perp AC, BA \subset (ABC) \\ MA \perp AC, MA \subset (MAC) \end{array} \right\} \Rightarrow \sphericalangle((MAC), (ABC)) = \sphericalangle(MA, AB) = \sphericalangle MAB \quad (2 \text{ puncte})$$

$$\text{tg}(\sphericalangle(MAC), (ABC)) = \text{tg}(\sphericalangle MA, AB) = \text{tg} 45^\circ = 1. \quad (1 \text{ punct})$$